

Lineare Algebra Mitschrieb

Maik Wild

October 27, 2014

Definition 2.2

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt injektiv, wenn keine zwei Elemente in X auf dasselbe Element in Y abgebildet werden, daher:

$$\forall x, x' \in X \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Dies ist äquivalent zu $\forall x, x' \in X : x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Die Abbildung f heißt surjektiv, wenn jedes $y \in Y$ ein Urbild x besitzt, also $f(x) = y$; daher $f(X) = Y$ oder

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y.$$

Eine Abbildung, welche injektiv und surjektiv ist, heißt bijektiv.

Schaubild 1

Beispiel: Für jede nichtleere Menge X existiert die identische Abbildung $\text{id}_X : X \rightarrow X, x \mapsto x$ ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

Definition 2.3

Es seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Dann heißt $g \circ f : X \rightarrow Z, x \mapsto g(f(x))$ die Komposition von g nach f .

Proposition 2.4

Es seien $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ und $h : Z \rightarrow W$ Abbildungen. Dann gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Beweis: *Hier beweis einfügen*

Definition 2.5

Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Abbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X, y = f(x) \mapsto x$ die zu f inverse Abbildung.

Bemerkung:

1) Obige Abbildungsvorschrift ist nur für bijetive Abbildungen erklärt

2) Es gelten $f^{-1} \circ f = id_x$ und $f \circ f^{-1} = id_y$.

Sind X, Y Mengen so bezeichnet Abbildung (X, Y) die Menge aller Abbildungen von x nach y und $\text{Bij}(X, Y)$ jene aller bijektiven Abbildungen, es gilt $\text{Bij}(X, Y) \subseteq \text{Abbildung}(X, Y)$.

I.3 Relationen

Definition 3.1

Eine Relation R auf Mengen A und B ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$.

Man notiert aRb , falls $(a, b) \in R$ gilt, oder sogar $a \sim b, a \leq b$

Beispiel:

1) Auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ die Ordnungsrelation $(x \leq y)$

2) $A : A \rightarrow B$ definiert eine Relation $R_f(a, b) \in R_f \Leftrightarrow b = f(a)$ [R_f ist Graf von A]

Definition 3.2

Eine Relation $\sim$ auf X heißt Äquivalenzrelation, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Reflexivität: Für alle $x \in X$ gilt $x \sim x$.

(ii) Symmetrie: Aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$.

(iii) Transitivität: Aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$.

Für jedes $x \in X$ heißt $[x]_{\sim} = \{y \in X \mid y \sim x\} \subseteq X$ die Äquivalenzklasse von x .

Die Menge der Äquivalenzklassen $X/\sim = \{[x]_{\sim} \mid x \in X\}$ nennt man Quotientenmenge von X nach $\sim$.

Die Abbildung $\pi_{\sim} : X \rightarrow X/\sim, x \mapsto [x]_{\sim}$ nennt man die Quotientenabbildung oder kanonische Projektion

Beispiel:

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Auf $\mathbb{Z}$ wird eine Relation $\equiv_n$ wie folgt definiert: Es gilt genau dann $x \equiv_n y$, wenn n die Differenz $x - y$ teilt; daher wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert mit $k \cdot n = x - y$.